SchülerInnenwettbewerb "MathEyes" in Oberösterreich

JÜRGEN MAASZ, LINZ

Viele Hundert Schülerinnen und Schüler sowie Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer aller Schulstufen und Schultypen in Oberösterreich hatten im letzten Schuljahr im Rahmen des Wettbewerbes große Freude an einem Mathematikunterricht, in dem sie gelernt und geübt haben, die Welt mit „mathematischen" Augen zu sehen und zu verstehen. Die besten eingereichten Werke wurden mit Preisen ausgezeichnet und in einer Broschüre zusammengefasst; alle Beiträge (auch die zum laufenden Wettbewerb) finden sich im Internet auf der Projekthomepage: http://www.jku.at/idm/content/e83438/e209929. In diesem Beitrag skizziere ich ein wenig von den Hintergrundüberlegungen und zeige einige Beispiele von Wettbewerbsbeiträgen, die unmittelbar als Idee für eigenen Unterricht genutzt werden können.

1. Die Welt mit „mathematischen" Augen sehen und verstehen

Was sind „mathematische" Augen? Der Begriff findet sich nicht im Lehrbuch der Medizin oder der Biologie, er ist mit didaktischer Absicht neu geschaffen worden, um zur Konzentration auf Mathematik zu motivieren, den Blick aufs Mathematische zu fokussieren. Das Auge des Menschen wandelt optische Reize (hell, dunkel, Farbe, …) in Nervenimpulse, die vom Sehnerv ins Gehirn geleitet werden (eine gute Einführung in die Biologie bzw. Medizin des Auges findet sich z.B. bei Wikipedia: http://de.wikipedia.org/wiki/Auge etc.). Nicht das Auge, sondern das Gehirn entscheidet, welche der eintreffenden Informationen bewusst wahrgenommen und weiter verarbeitet werden. Viele Informationen werden zudem verarbeitet, ohne dass wir darüber bewusst nachdenken. So entscheidet das Gehirn (nachdem wir als Kinder gehen gelernt haben), ob wir etwa die Beschaffenheit eines Weges, den wir gehen wollen, direkt in die Steuerung der Beine umsetzen, oder ob ein besonderes Merkmal des Weges (ein Loch in der Straße oder so), unserer bewussten Aufmerksamkeit bedarf. Wer lange unfallfrei Auto fährt, hat eine Reihe von Routinen entwickelt, relevante Signale (rote Ampel, aufleuchtendes Bremslicht, Bewegung von der Seite auf die Fahrbahn etc.) ohne Nachdenken in entsprechende Handlungen wie „Bremsen" umzusetzen. Gerade in Gefahrensituationen ist es sehr hilfreich, wenn der Fuß schon auf die Bremse drückt, bevor die Fahrerin oder Fahrer darüber nachdenkt, dass dem Ball, der auf die Straße rollt, auch einige Kinder folgen könnten und deshalb Bremsen ohne Zweifel angebracht ist.

All diese und viele andere Aspekte des Sehens haben mit Mathematik „nur" insofern etwas zu tun, als sie zumindest teilweise mathematisch modellierbar und damit besser sind verstehbar und dadurch sogar beeinflussbar werden. Ein Beispiel ist die Linse im Auge, die mathematisch-physikalisch sehr gut modelliert werden kann. Mit Hilfe von passend berechneten Brillen, Kontaktlinsen oder Operationen (mit Lasern – in deren Konstruktion und medizinischen Anwendung steckt wieder ganz viel Mathematik!) ist es auch möglich, die Sehleistung zu verbessern. Sind das dann „mathematische Augen"?

1.1 Das mathematische Auge als Filter für Information

Augen, die von einer Brille unterstützt werden, können zwar mit Hilfe der Mathematik besser sehen, sind aber keine „mathematischen Augen". Das „Mathematische" am Auge ist eine intendierte und gezielte **Auswahl** von Informationen, über die das Gehirn entscheidet. Aus der Fülle der optischen Informationen, die das Auge über den Sehnerv ins Gehirn leitet, soll das Gehirn ganz gezielt jene Informationen auswählen, die etwas mit Mathematik zu tun haben. Beim „zu tun haben" gibt es zwei Hauptrichtungen: Einmal weiß das Gehirn schon etwas über Mathematik, etwa über geometrische

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 48, 2012, S. 68 - 81

Objekte wie Rechtecke oder Kreise und erkennt in einem komplexen Bild (etwa eines Schulgebäudes) Fenster oder runde Schilder als Rechtecke oder Kreise. Oder dem Gehirn fällt eine Regelmäßigkeit in einem technischen oder natürlichen Objekt auf und es stellt die Frage: „Was ist das?" Diese Frage kann dann im mathematischen Kontext (insbesondere im Mathematikunterricht) präzisiert werden: Kann diese Kristallstruktur, dieser Tannenzapfen, dieses Zahnradgetriebe, diese Wolkenform, dieser Verlauf der Strömung des Wassers etc. mathematisch beschrieben werden?

Offenbar hängt das Niveau der Leistung des mathematischen Auges von den Vorkenntnissen und Fähigkeiten des Gehirns ab. Wer gezielt nach Kreisen oder Ellipsen sucht, muss vorher wissen, was das ist. Wer davon fasziniert ist, was an der Wasseroberfläche eines Teiches zu sehen ist, in den gleichzeitig zwei Steine fallen, findet vielleicht zu einer physikalischen Beschreibung von sich überlagernden Wellen und den entsprechenden Gleichungen. Dabei hilft es sicher, vorher schon trigonometrische Funktionen verstanden zu haben. Für die Schule bedeutet das Niveauargument insbesondere eine Altersabhängigkeit – je älter und besser mathematisch geschult die Schülerinnen und Schüler sind, desto mehr Möglichkeiten eröffnet für sie ein mathematischen Blick auf die Welt.

Das gilt selbstverständlich auch für Erwachsene. Prof. H. Neunzert, Begründer der Technomathematik in Kaiserslautern, berichtete am Kaffeetisch aus seinen Erfahrungen beim Finden von Fragestellungen für mögliche Projekte für Firmen, er müsse nur durch eine Werkhalle gehen, um mit einem Projektvorschlag wieder herauszukommen. Aufgrund seiner Erfahrung sieht er mit mathematischen Methoden verbesserbare Aspekte einer Produktion. Er fügte noch hinzu, dass er als Numeriker und Experte für Differenzialgleichungssysteme selbstverständliche solche Projekte sieht, die mit Differenzialgleichung modelliert und gelöst werden können. Wenn ein Kollege von ihm, der Professor für Stochastik und Wahrscheinlichkeitstheorie ist, durch die selbe Werkhalle geht, entdeckt er ein Problem, dass sich stochastisch modellieren und lösen lässt – vielleicht sehen beide sogar dasselbe Problem mit ihren je spezifisch trainierten mathematischen Augen.

1.2 Interesse steuert Filter für Information

Im Alltag und in der Wissenschaft arbeitet das Gehirn sehr oft als Filter von Information. Entscheidend bei einer solchen Fokussierung, der Konzentration auf eine Sache ist der Wille, das Interesse an dieser Sache. Bevor ich wieder auf die Mathematik zurückkomme, erläutere ich das an einem Beispiel aus dem Alltag. Nehmen wir an, eine Reihe von Personen geht durch eine Straße in der Vorstadt, in der viele Einfamilienhäuser mit Vorgarten stehen. Was sehen diese Menschen?

Ehepaar Huber hat gerade selbst ein Haus in der Nähe gebaut und will nun den eigenen Vorgarten gestalten. Deshalb sehen sie sehr viel Hecken, Zäune und Bepflanzungen. Herr Müller überlegt den Kauf eines neuen PKW, vielleicht wird es ein Sportwagen? Er sieht am Rand der Straße eine ganze Reihe von Autos stehen und sogar einige Sportwagen, die er genauer betrachtet. Frau Müller fühlt sich in ihrem Mantel nicht mehr recht wohl und achtet darauf, welche Mäntel die anderen Frauen tragen, die sie unterwegs sieht. Frau Mayr hat gerade am Wochenende zuvor an einem Seminar teilgenommen, in dem sie viel über Körpersprache gelernt hat – ihr fallen gleich Signale auf, die andeuten, wie die Menschen sich fühlen, die sie sieht. Herr Mayr hingehen hat im Wetterbericht gehört, dass es bald regnen wird, aber seinen Regenschirm vergessen. Also schaut er immer wieder ängstlich zum Himmel.

Im Alltag ist es ganz üblich, dass Menschen, die zur selben Zeit am selben Ort sind, ganz unterschiedliche Dinge oder Leute oder Aspekte von Leuten oder Dingen bewusst sehen. Im Unterricht müssen wir bisweilen zur Kenntnis nehmen, dass die Schülerinnen und Schüler keinesfalls wie gewünscht alle konzentriert auf die Tafel schauen und verstehen, was dort über Mathematik geschrieben steht, sondern z.T. aus dem Fenster schauen, auf andere Schülerinnen und Schüler, auf ihr Handy etc. Unser Ziel ist, ihr Interesse und damit (über den entsprechenden Informationsfilter im Gehirn) ihre Aufmerksamkeit für die Mathematik zu wecken und zu konzentrieren. Dazu soll die Metapher vom „mathematischen Blick" beitragen.

Als didaktisches Hilfsmittel zur Fokussierung diente eine „mathematische Brille“ aus Karton, die herzustellen zugleich für viele Klassen ein guter Einstieg ins Projekt war. Hier zwei Beispiele:

Abb. 1: Kinder mit Mathebrille

Eine andere Fokussierungshilfe waren Steckbriefe, auf denen die Eigenschaften der gesuchten Objekte zusammengefasst wurden. Auch das ist ein guter Einstieg in die Suche.

Steckbrief

Die Form heißt

Quadrat.

Es hat 4 Ecken und

4 Seiten.

Alle Seiten sind gleich

lang.

Abb. 2: Wanted!

1.3. Die Idee stammt aus Dublin, Irland

Die Idee mit den „mathematischen Augen“ und einen SchülerInnenwettbewerb dazu stammt aus Irland. Eine Kollegin aus Dublin, Terry Maguire (http://www.teachingandlearning.ie/dt_team/terry-maguire/) lud mich ein, als „external examinator“ eine Dissertation („“Looking at the Workplace trough Mathematical Eyes”) zu begutachten, die J. Keogh geschrieben hat. In diesem Zusammenhang stellte sie mir den irischen Wettbewerb vor (http://www.haveyougotmathseyes.com/). Auch unter dieser Internetadresse finden Sie viele Ideen für Mathematikunterricht und erfolgreich durch mathematische Augen schauende Schülerinnen und Schüler.

2. Beispiele aus dem Wettbewerb als Anregung für eigenen Unterricht

Im Internet auf der Projekthomepage (http://www.jku.at/idm/content/e83438/e209929) finden sich alle Einsendungen zu allen Wettbewerben. Hier will ich nur eine kleine Auswahl präsentieren. Zunächst möchte ich die Aufmerksamkeit darauf lenken, wie sich mit wachsendem Alter der Schülerinnen und Schüler der Schwerpunkt der Arbeit von Sehen und kreativ gestalten auf sehen und mathematisieren verschiebt.

2.1 Beispiele aus Vorschule, Grundschule und Sonderschule

Abb. 3: Beide Bilder aus Diesterwegschule, Linz, Vorschulklasse

Abb. 4: Olivers Beitrag

Oliver besucht die Landessonderschule 1 St. Isidor. Er fand einige geometrische Figuren auf dem Schulschild.

Abb. 5: Volksschule Böhlerwerk, 1. Klasse

Fabian machte aus einer Blüte ein ganzes Bild.

Gegen Ende der Volksschulzeit wurden häufig Entdeckung und Rechnung verbunden. Ein Beispiel dafür ist das Bild von Alexandra, die einen „Heißkörper“ mit mathematischen Augen betrachtet hat.

Abb. 6: Volksschule Steyr, 4. Klasse

2.1 Beispiele aus der Sek. I

In den Einreichungen der 10- bis 14jährigen steigt der Anteil der Berechnungen weiter an.

Klasse 2 der NMS Bad Goisern war offensichtlich fasziniert von großen Zahlen, insbesondere der wachsenden Erdbevölkerung. Ausgangspunkt für ihre Arbeiten war ein Zeitungsausschnitt in Zusammenhang mit Bildern von vielen Menschen.

Abb. 7a: NMS Bad Goisern, 2. Klasse

Im nächsten Schritt wurde daraus eine Fragestellung formuliert.

Abb. 7b: NMS Bad Goisern, 2. Klasse

Offenbar war eine sehr realitätsnahe Beantwortung für den ersten Anlauf zu schwer. Es ist in der Tat nicht einfach, herauszufinden, wie groß die öffentlich betretbare und von der Geländeform her tatsächlich begehbare Fläche in Österreich ist. Nehmen wir zum Beispiel einen Hektar Fläche aus einer Stadt. Dann sind mehr als 50% (oder noch mehr?) der Fläche Privatbesitz, dürfen also von irgendwelchen Ausländern nicht betreten werden. Dann gibt es viele Straßenflächen, die aus Gründen der Verkehrssicherheit nicht betreten werden dürfen. Wie viele Quadratmeter an Bürgersteigen, öffentlichen Plätzen und anderen Flächen in Gebäuden bleiben?

Wie steht es mit einem Hektar Wald? Wie viel Platz ist zwischen den Bäumen, wenn der Wald kein umzäunter Privatbesitz ist? Wie berechnen wir Felder und Berge und Gewässer? Das genauer zu schätzen oder konkret zu ermitteln, ist eine Anregung für Ihren realitätsnahmen Unterricht!

Was schätzt du?????

Wie haben sooooo viele Menschen in Österreich Platz?

Stehen die Leute ganz eng beisammen?

Oder haben alle genug Platz, um sich auf den Boden zu legen?

Oder stehen oder liegen die vielen Menschen sogar übereinander?

Oder haben dazwischen sogar noch Bäume und Häuser Platz?

Sobald du für dich eine Vorstellung gefunden hast, schau bei der Lösung nach!

Abb. 7c: NMS Bad Goisern, 2. Klasse

Nicht vergessen möchte ich die nun nahe liegende Übung zum Schätzen im vorgegebenen Modell: Was meinen Sie? Was kommt heraus?

Jeder hätte fast 12 m² Platz!!!!!!

Beweis: **Österreich hat eine Fläche von 83 855 km² = 8 385 500 ha = 838 550 000 a = 83 855 000 000 m²**
Dividiert man die m²-Fläche Österreichs durch die Bevölkerungszahl der Erde so erhält man als Ergebnis 11,646 m²

Wie genau war deine Schätzung? **- wir haben uns ziemlich verschätzt!!!**

Abb. 7d: NMS Bad Goisern, 2. Klasse

Schülerinnen und Schüler der NMS Reichraming betrachteten die folgende Fotomontage mit mathematischen Augen und formulierten eine Frage dazu:

Abb. 8: NMS Reichraming, 3. Und 4.. Klasse

Auch hier schlage ich vor, zunächst mit einer Schätzung zu beginnen: Welchen Prozentsatz halten Sie (bzw. Ihre Schülerinnen und Schüler) zu realistisch?

Im Wettbewerb wurde dazu folgende Modellierung und Berechnung eingereicht:
„1,3 Milliarden Tonnen Lebensmittel werden weltweit im Jahr weggeworfen.
1 300 000 000 t = 1 300 000 000 000 kg
Davon sind ~ 60% vermeidbar.
Das sind 780 000 000 000 kg.
1,842 Milliarden Menschen auf der Welt haben nicht genug zu essen.
870 Millionen Menschen weltweit leiden an Hunger.
Das sind 870 000 000.

Jährlich sterben etwa 8,8 Mio. Menschen an Hunger = ein Todesfall alle 3 sek.
1 Jahr = 365 Tage = 8760 h = 525 600 min. = 31 536 000 sek.
780 000 000 000 kg Lebensmittel stehen 8 800 000 Hungertote gegenüber.
Tote durch Hunger: 88636 kg Lebensmittel/ Tote
Hungerleidende: 243 kg Lebensmittel/Tag/Tote
780 000 000 000 kg : 870 000 000 Hungerleidende
= ~ 897 kg/ Hungerleidende jährlich = ~ 2,46 kg/ Hungerleidende täglich

Ergebnis:

Mit dem vermeidbaren Teil an Lebensmittel die jährlich weltweit weggeworfen werden (60% von 1 300 000 000 000 kg = 780 000 000 000 kg) konnte man den Hunger 870 Millionen hungerleidender Menschen mehr als stillen.
Jede(r) Hungerleidende wurde im Durchschnitt jährlich 897 kg oder täglich 2,46 kg an Lebensmittel erhalten.

Der Hunger könnte für alle gestillt werden!" (Katalog, S. 103f.)

Auch das folgende Beispiel aus der Sek. I zeigt nicht nur Kreativität, sondern bietet zugleich einen guten Ansatzpunkt für entdeckenden Mathematikunterricht. Schülerinnen und Schüler aus der Klasse 2 NMS St. Peter am Wimberg suchten nach Dreiecken und fanden sehr viele. Hier einige Beispiele:

Abb. 9a: St. Peter am Wimberg, 2. Klasse

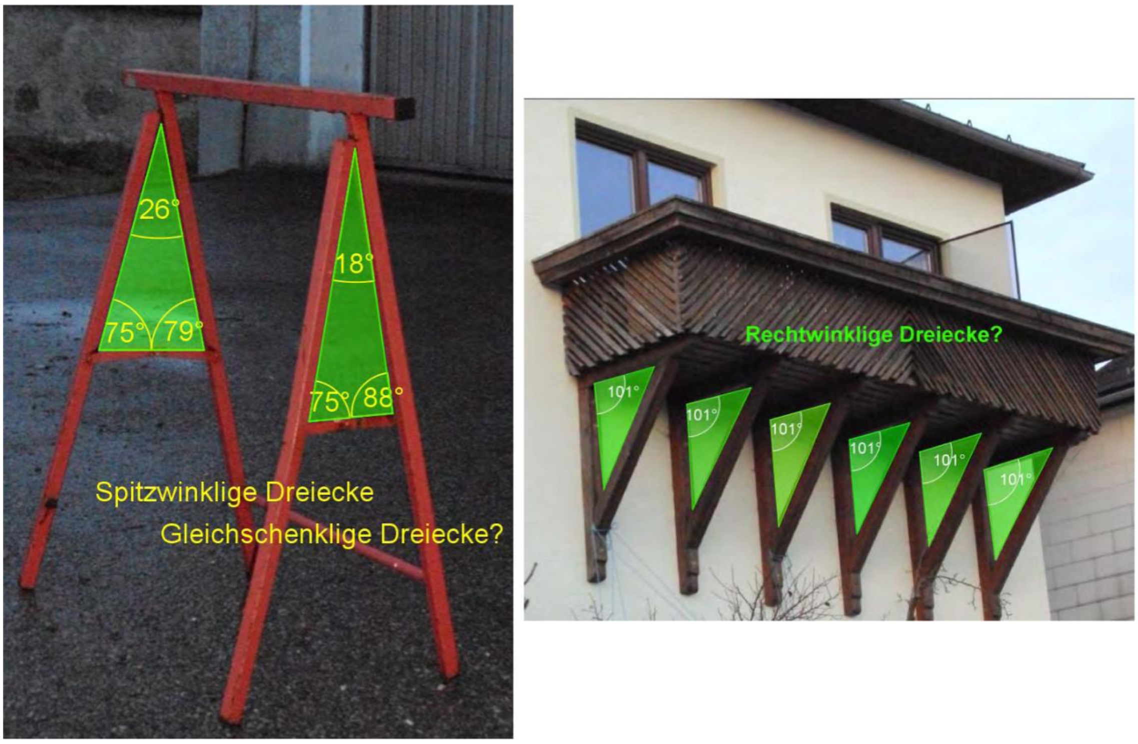

Abb. 9b: St. Peter am Wimberg, 2. Klasse

Abb. 9c: St. Peter am Wimberg, 2. Klasse

Wie können Sie auf solchen Bildern Mathematikunterricht aufbauen? Versuchen Sie, die Schülerinnen und Schüler dabei zu unterstützen, die im Foto gestellte Frage zu beantworten. Als Hilfsmittel bietet sich die Betrachtung eines Dreiecks im Klassenraum an (etwa ein Geodreieck oder ein aus einem Blatt Papier ausgeschnittenes Dreieck), das aus verschiedenen Perspektiven betrachtet wird. Wenn nicht direkt („normal“) hingesehen wird, sondern mit einem mehr oder weniger großen Winkel von der Seite, ändert sich der Eindruck von Dreieck – und damit auch von den Winkeln. Mit Hilfe trigonometrischer Überlegungen findet sich dafür auch eine überzeugende Erklärung (Stichwort: Sinus). Offensichtlich gibt es hier einen guten Anknüpfungspunkt für eine Verbindung von Mathematikunterricht und geometrisch Zeichnen/Darstellende Geometrie. Wer die Gelegenheit hat, kann auch fächerübergreifend mit der Physik etwas über Optik lehren und lernen lassen. Dabei können (selbst erfundene) Experimente mit Lichtquelle, Projektion und Schatten zu vielen Entdeckungen motivieren.

2.1 Beispiele aus der Sek. II

Leider erreichten uns nur wenige Einsendungen aus der Sek. II – die zentrale Matura führte schon im Jahr 2013 bei Lehrenden und Lernenden zu einer absoluten Konzentration auf das Wesentliche – Aufgaben üben! Die 6. Klasse des BRG solarCity in Linz ging der Frage nach, weshalb Parkplätze für Behinderte extra breit sind:

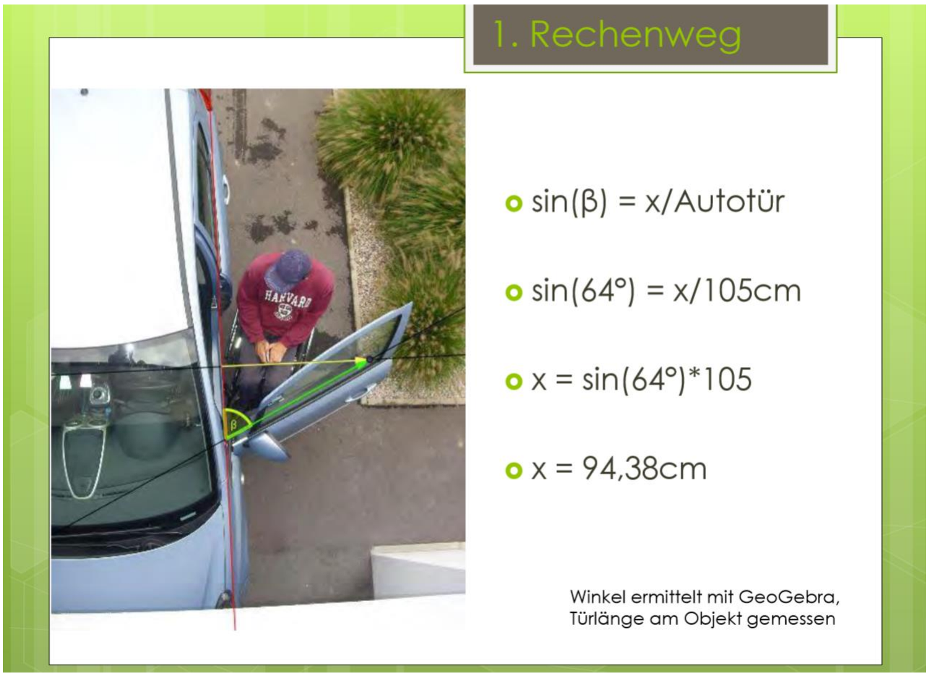

Abb. 10a: BRG solarCity, 6. Klasse

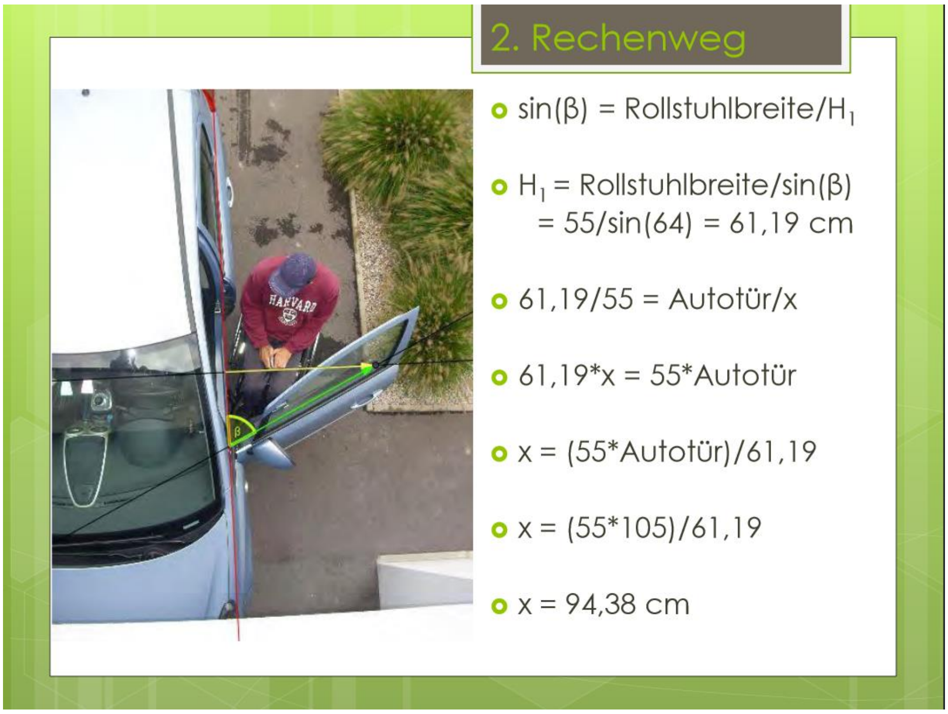

Abb. 10b: BRG solarCity, 6. Klasse

Nach der Berechnung dachten sie auch die Bedeutung des Ergebnisses nach.

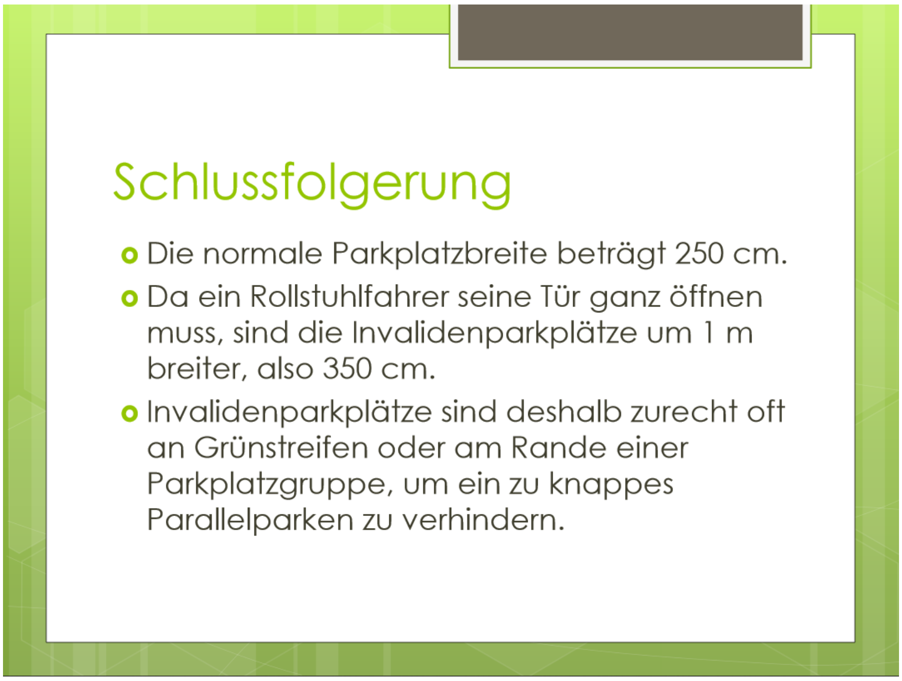

Abb. 10c: BRG solarCity, 6. Klasse

Klasse 5 HM A der HLA für Mode in Ebensee war offenbar fasziniert von Gebäuden der Architektin Zaha Hadid. Sie nahm Bilder solcher Gebäude aus dem Internet als Anlass zu Berechnungen – ähnlich wie die Volksschülerinnen Volksschüler der 4. Klasse, aber mit mathematischen Werkzeugen aus der Sek. II.

Abb. 11a: HLA für Mode in Ebensee, 5. Klasse

Hier wurde eine Ellipse als Näherung nachgezeichnet und anschließend berechnet:

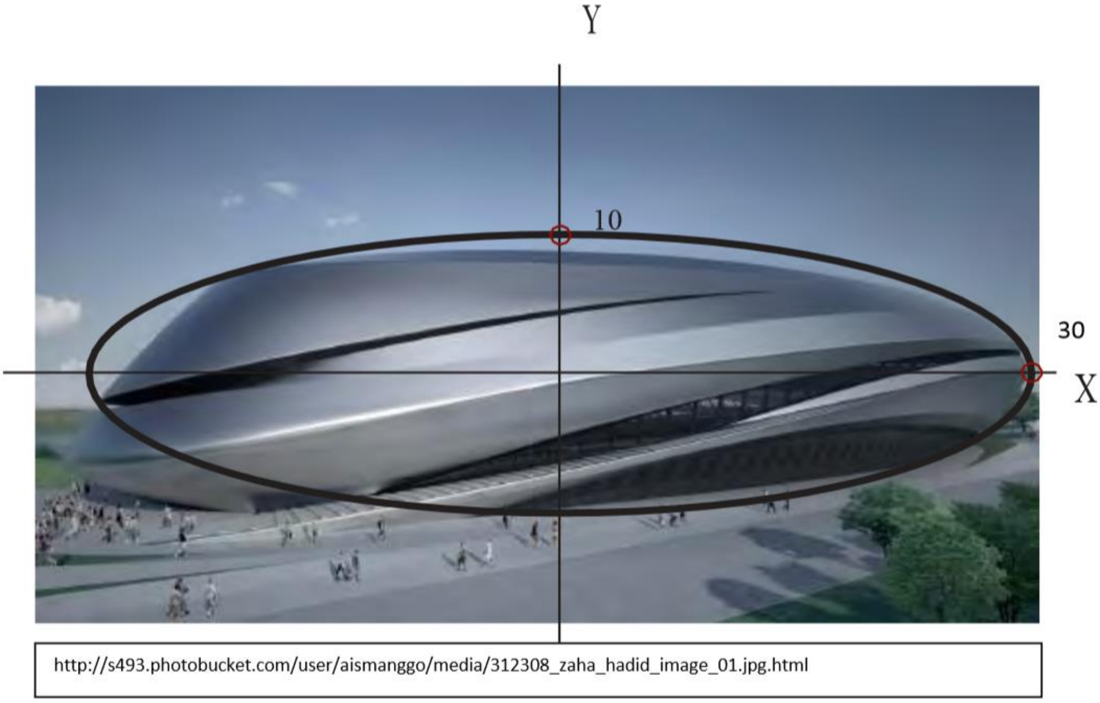

Abb. 11a: HLA für Mode in Ebensee, 5. Klasse

Selbstverständlich bietet es sich an, solche Bilder aus dem Internet in GeoGebra oder eine ähnliche Software zu übertragen, um die Mittel eines solchen Programms zur mathematischen Berechnung zu nutzen.

LITERATUR

Katalog der ausgezeichneten Einreichungen zum Wettbewerb: Die Welt mit mathematischen Augen sehen, Linz 2014